Title	Quasi-field ノ Normal bases
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 205 p.412-p.419
Issue Date	1940-11-30
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74818
rights	
Note	

888. Quasi-field ノ Normal bases

中山　正（阪大）

最近 Jacobson ハ ガロア理論ノ主定理ヲ次ノ様ナ意味ニ於テ Quasi-fields マデ拡ゲタ. 即チ P ヲ一ツノ quasi-field. ソコニ有限ノ outer automorphism ノ群 $\mathfrak{G}$ (unit element 以外ガミナ outer ノ意) ガ與ヘラレテヰルトシ、ソノ order ヲ n, マタ $\mathfrak{G}$ デ動カヌ元ノナス quasi-subfield ヲ Φ トスル. シカラバ $(P:\Phi)=n$ デ P ト Φ ノ間ノ quasi-fields ト $\mathfrak{G}$ ノ subgroups ノ間ニ例ノ通リノ一對一對應ガ存在スル. ($(P:\Phi)=n$ ハ両側デデアル).

以下ニオイテ、更ニ P ハ Φ ニ對シテ Normal basis ヲモツ. 即チ Φ ノ左加群 P ヲ更ニ $\mathfrak{G}$ 右加群ト見タトキ得ラレル $\mathfrak{G}$ ノ表現 (Φ ニオケル) ハ $\mathfrak{G}$ ノ正規表現ト同値デアル. 即チ更ニ云ヒカヘレバ

$$b^E,\ b^R,\ b^S,\ \cdots\cdots,\ b^T \quad (\mathfrak{G}=\{E,R,S,\cdots\cdots,T\})$$

ノ如キ一ツノ元ノ conjugates ($\mathfrak{G}$ ニ関スル) カラ成立ツテヰル P ノ Φ ニ対スル左 basis ガ存在スルコトヲ証明スル。

証明ノ方法ニツイテ: 普通ノ Commutative ノ場合ノ Normal basis ノ定理ノ証明トシテハ (Noether ノ最初ノ然シ欠点ノアッタモノヲ除キ) Deuring ノ第一ノモノ (Annalen 107), Hasse-Brauer ノモ

（Hasse ノ類体論講義，Brauer：Annalen 110），Deuring ノ第二ノモノ（Annalen 113），Stauffer（Amer. J. 58）等ガアリ更ニ Artin ノ unpublished ノモノガアル。

最初ノ二ツハ共ニ基礎体デナク上ノ体ニオケル二表現ノ同値カラ下ノ体ニオケルモノヲ出ス方法デ本質的ニ相当近イモノデアル。シカシコノ方法ヲ直接我々ノ場合ニ modify スルコトハ非常ニ困難ニ見エル。マタ Artin ノハ interpolation ノ公式ヲ使フノデ、コレモ困難ニ見エル、以下ハ従ッテ Deuring ノ第二ノヲ（Stauffer ノモ大体同ジ idea デアル）modify スルコトヲ試ミルノデアル。

但シコノ方法ハ Speiser ノ定理ノ拡張及ビ有限群ノ表現ノ分解ヲ主ナ補助トスルノデアッテ、ソノタメニ Deuring（及ビ Stauffer）ハ第二ノ群ノ表現ノ分解ガ普通ノ如ク行ク場合、即チ体ノ標数ガ $\mathfrak{G}$ ノ order ヲワラズ従ッテ $\mathfrak{G}$ ノ群環ガ semi-simple ニナル場合ニ限ラザルヲ得ナカッタ。然シソノコトノ non-semi-simple ナ algebra ノ正規表現ノ理論（主トシテ Brauer-Nesbitt）ハソウデナイ一般ノ場合ニマデ証明ヲ拡張スルコトヲ可能ナラシメテキルノデアル（近刊 Frobeniusean algebras，II，附録）。

従ッテ以下ノ quasi-field ノ場合モソノ点ハ大丈夫デアル。

次ニ一寸注意シテ置キタイノハ我々ノ興味ハスベテPガソノ center ニ對シテ無限階デアル場合ニアルコトデアル、有限階ナラバ万事殆ンド trivial ニナルノデアル。

サテ、Pノ center ヲZトシ, $k=\Phi$ ヘZトオク. 更ニkノ第一種有限次拡大 k^* ヲ考ヘ、kヲ基礎体トシテ、ソレヲk^*マデ拡張スルコトニヨツテ P, Φカラ得ラレル P_{k^*}, Φ_{k^*}ヲソレゾレ P^*, Φ^*デアラハスコトニスル。P/Φノ automorphism ハ P^*/Φ^* ノソレト考ヘラレル。(P^*, Φ^*ハモハヤ quasi-field デハ一般ニハナイ. 然シ semi-simple ring デアル)

補助定理 (Speiser ノ定理ノ拡張) $\mathfrak{G}$ノ各元 S ニ P^* ニオケル regular matrix C_S ガ對應シテヰテ且ツ

$$(1)\quad C_S C_T^S = C_{TS}$$

ヲ満シテヰルトスル。然ラバ $C_S = A^{-1}A^S$ トナル様ナ P^* ニオケル regular matrix A ガ存在スル。

證明ハ P^*/Φ^*デナク P/Φ ノ場合ニハ Jacobson ニヤツテアリ、我々ノ場合モ容易ニ同様ニ證明サレル. 即チ (少シク Jacobson ノトハ異ツタ云ヒ方デ述ベレバ)

$$u_E,\ u_S,\ \cdots\cdots,\ u_T$$

ナル元ヲ新タニ導入シテ crossed product

$$\mathfrak{r} = u_E P + u_S P + \cdots\cdots + u_T P$$

ヲ考ヘル。タダシコヽニ

$$u_S \eta^S = \eta u_S \quad (\eta \in P), \quad u_S u_T = u_{ST}.$$

シカラバ．コレハ simple ring ＝ナル（Jacobson 参照）、シカモソノ center ガ k デアルコトハ明カデアル。今ソレヲ k^* マデ拡張スレバ結局ソレハ

$$\mathfrak{r}_{k^*} = \mathfrak{r}^* = u_E P^* + u_S P^* + \cdots\cdots + u_T P^*$$

ナル crossed product ＝外ナラス。故＝ $\mathfrak{r}^*$ モ simple ring デアル．他方関係 (1) ヲミタス C_S ガ與ヘラレタコトハ、ソノ次數 r トスレバ

$$V = v_1 P^* + v_2 P^* + \cdots\cdots + v_r P^*$$

ナル vector space ＝オイテ u_S ＝ハ (C_S, S) ナル semi-linear transf.， $\eta \in P^*$ ＝ハ $v \to v\eta$ ナル transf. ヲ對應サセルコト＝ヨッテ、V ガ $\mathfrak{r}^*$ ノ右加群＝ナル事デアル。

シカル＝ simple ring $\mathfrak{r}^*$ ノ右加群ハ單＝ $\mathfrak{r}^*$ ノ center k^* ＝對スル behavior デキマル．ヨッテ今 $\{C_S\}$ ノカハリ＝ $\{E\}$ ヲトッタトキノ加群 V_1 ヲ考ヘルト k^* ノ元＝ハ同ジ＝ behave スル．故＝ V ト V_1 ハ作用同型、スナハチ

$$C_S = A^{-1} E A^S = A^{-1} A^S$$

ナル regular matrix A ガ存在スル。

定理ノ証明：

上ノ k^* ヲ適當＝トッテ有限群 $\mathfrak{G}$ ノ absolutely irred. ナ表現ガミナ k^* ノ中＝アル様＝スル．（以下簡單

ノタメ Of ノ order n ハ体ノ標数ガ割レナイトスル．〔割レル場合ニツイテハ前述拙著ヲ参照サレタイ〕．我々ノ関心ハ今ムシロ comm. ⟶ non-comm. ニアルノダカラ）．ソシテ、ソノ様ナ k^* ニオケル irred. 表現 $S \to U_S$ ヲトル。

シカラバ $U_S U_T = U_{ST}$，即チ $U'_T U'_S = U'_{ST}$ デアル．（ダッシユハ transposition）．シカルニ、コレハ関係 (1) ノ special case デアル．故ニ regular matrix A in P^* ガアッテ

$$U'_S = A^{-1} A^S \qquad 即チ \qquad A^S = A U'_S$$

デアル。即チ $A = (a_{ij})$ トスレバ

$$(2) \quad (a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{ir})^S = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{ir}) U'_S$$

従ッテ，マタ

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}^S = U_S \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}$$

デアル（(2) カラ (3) ヲ出スノニ U_S ガ k^* ノ行列ナルコトガ使ッテアル）。

今 r^2 ノ個ノ P^* ノ元 a_{ij} ガ Φ^* ニ対シテ左側デ一次独立ノコトヲ云フ。

假ニ

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} g_{ij}\, a_{ij} = 0 \qquad (g_{ij} \in \Phi^*)$$

トスル。

他方 $U_E, U_R, \cdots\cdots U_T$ ノ k^* ニ於ケル適當ナ linear comb. ヲツクレバ任意ノ k, l ニ對シテ行列單位 ε_{kl} ガ得ラレル. ヨッテ今 ε_{11} ニナルノヲトリ、ソレニ相當スル $E, R, \cdots\cdots, T$ ノ lin. comb. ヲ a_{ij} ニホドコセバ (2) 又ハ (3) ニヨリ

$$a_{i1} \to a_{i1}, \quad a_{ij} \to 0 \qquad (j \neq 0)$$

故ニ (4) カラ

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{r} \varphi_{i1}\, a_{i1} = 0$$

トナル. 次ニ ε_{1j} ニ相當スルノヲホドコセバ(5)カラ

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_{i1}\, a_{ij} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, r)$$

トナル。即チ

$$(\varphi_{11}, \varphi_{21}, \cdots\cdots, \varphi_{r1})\, A = 0$$

デアル. 然ルニ A ハ regular ダカラ $\varphi_{11}, \cdots\cdots, \varphi_{r1} = 0$. 同様ニシテ他ノ φ モミナ 0. 即チ a_{ij} ハ左側デ Φ^* ニ對シテ一次獨立デアル。

ヨッテ a_{ij} デ張ラレタ Φ^*-左加群

$$m = \Phi^* a_{11} + \cdots\cdots + \Phi^* a_{1r} + \Phi^* a_{21} + \cdots\cdots + \Phi^* a_{rr}$$

ヲ考ヘル. シカルトキ r 個ヅヽマトメテミレバ各々ガ $\mathfrak{g}$ ノ(右)加群デソレニヨル表現ガ U_S ニナルコトヲ (3) ハ示シテヰル. スナハチ m ハ U_S ヲ define スル如キ Φ^*-$\mathfrak{g}$-

加群丁度r個ノ直和デアル。

以上ノコトハアラユル irred ナ表現ニツイテ云ヘル。ヨッテΦ^*-$\mathfrak{g}$-加群P^*ニヨル$\mathfrak{g}$ノ表現ハ正規表現ヲ含ミ従ッテ次数ヲ考ヘレバ一致スルコトニナル。

P^*ヨリΦ-$\mathfrak{g}$-加群Pニウツルノハ容易デアル。(Krull-Remak ノ定理ニヨル)

群環ガ semi-simple ノ場合ニハ$\mathfrak{U}_S$ヲ irred ノカハリニ、正規表現ノアル直既約成分ヲトリ、ソノ時r^2個ノa_{ij}スベテガナク。適當ナt個ノ横行(タゞシtハU_Sニ對應スル(Braner-Nesbitt ノ意味デ)既約表現ノ次数)ニ属スルa_{ij}ガ一次独立ノコトガ云ヘルノデアル。委シクハ省ク。(ソノ既約成分ガ最大直可約成分ナルコトヲ使用スルノデアル)

<u>附記 I</u>: 上ノ証明デハ$b^E, b^R, \cdots\cdots, b^T$ナル<u>左</u> basis ノ存在ヲ証明シタ。同様ニ同ジ形ノ<u>右</u> basis ノ存在ガワカル。然シ同時ニ左右ノ basis ニナルヤウニ出來ルノダラウカ?

<u>附記 II</u>: 上記ニ Speiser ノ定理ノ拡張ヲ使用シタ、我々ノ目的ニハコノ形デヨイノダガ、定理自身トシテハ

$$(6)\qquad C_S \overset{S}{C_T} C_{TS}^{-1} = D_S \overset{S}{D_T} D_{TS}^{-1}$$

ナラバ$C_S = A^{-1} D_S \overset{S}{A}$ニナル。ノ形ニ云ヒタイノデアル。事實 comm. ナPデハ云ヘル事ハヨク知ラレテヰル。シカシソノ場合ノ証明ハ$A = \sum_S \rho \overset{S}{D_S^{-1}} C_S$ナル形ノ行列ヲ考ヘ、

コレガ *regular* ニナルヤウニ ρ ヲキメルノデアル。
(大阪: 数研 20 参照). シカシコレデハ ρ^S ガ (6) ト commutative デナイト駄目デ旨ク我々ノ場合ニ行カナイ. 然ラバ, 構造論的ナ証明トナルト、ソレニハ上記ノ crossed product γ ニ相当スル ring ガ手ニ負ヘルモノデナイト困ル, 即チ factor set (6) ガ適当デ γ ニ相当スル ring ガ simple デナクトモ, semi-simple 或ハソウデナクトモ uni-serial ring 乃至ハ generalized uni-serial ring (Frobeniusean algebras II, 参照). 等ナラソレノ Module ノ構造ガワカルカラ出来ル. シカシ gen. uni-serial ring ガ現在(有限) moduli ノ構造ノ Über-sicht ノ得ラレル最モ一般ノ ring ノ様ニ思ハレ、ソレ以外ノ一般ノ ring ノ場合ダトドウモ旨ク行カナイ。何カ旨イ工夫ガアルト出来ルノダラウト思フノダガ、御教示ヲ得レバ幸甚デアル。